Ellipsoidal 座標から始まる Lamé の微分方程式

adhara*

2021 年 4 月 4 日

概要

本ノートでは Laplace 方程式を Ellipsoidal（楕円体）座標で変数分離することで Lamé の微分方程式を導入する。

1 Ellipsoidal 座標の導入

デカルト座標 (x, y, z) と Ellipsoidal 座標 (ρ_1, ρ_2, ρ_3) の間の変換を

$$x = \pm\sqrt{\frac{(\rho_1-\alpha)(\rho_2-\alpha)(\rho_3-\alpha)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{(\rho_1-\beta)(\beta-\rho_2)(\beta-\rho_3)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}}$$
$$z = \pm\sqrt{\frac{(\rho_1-\gamma)(\rho_2-\gamma)(\gamma-\rho_3)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}} \tag{1}$$

で与える。ただし、

$$\alpha \le \rho_3 \le \gamma \le \rho_2 \le \beta \le \rho_1, \quad \alpha < \gamma < \beta \tag{2}$$

とする。ここで α, β, γ はパラメータであり、これを定めるごとに座標系が定まる。

これら ρ_1, ρ_2, ρ_3 を指定した時に定まる 8 つの点（各象限に一つ存在）はデカルト座標系の表示で三つの図形

$$\frac{x^2}{\rho_1-\alpha} + \frac{y^2}{\rho_1-\beta} + \frac{z^2}{\rho_1-\gamma} = 1 \tag{3}$$
$$\frac{x^2}{\rho_2-\alpha} + \frac{y^2}{\rho_2-\beta} + \frac{z^2}{\rho_2-\gamma} = 1 \tag{4}$$
$$\frac{x^2}{\rho_3-\alpha} + \frac{y^2}{\rho_3-\beta} + \frac{z^2}{\rho_3-\gamma} = 1 \tag{5}$$

の交点である。一つ目の図形は楕円体、二つ目の図形は一葉双曲面、三つ目の図形は二葉双曲面である。

* Twitter @adhara_mathphys

2　Laplace 方程式の ellipsoidal 座標による変数分離

2.1　Laplacian の ellipsoidal 座標表示

三次元 Laplacian$\nabla^2_{\mathbb{R}^3}$ を ellipsoidal 座標で表示する。このとき曲線直交座標系における Laplacian を求める公式によれば、

$$h_{\rho_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right)^2} \tag{6}$$

$$h_{\rho_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_2}\right)^2} \tag{7}$$

$$h_{\rho_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_3}\right)^2} \tag{8}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\mathbb{R}^3} &= \frac{1}{h_{\rho_1}h_{\rho_2}h_{\rho_3}}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{h_{\rho_2}h_{\rho_3}}{h_{\rho_1}}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{h_{\rho_1}h_{\rho_3}}{h_{\rho_2}}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\frac{h_{\rho_1}h_{\rho_2}}{h_{\rho_3}}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{h^2_{\rho_1}}\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{h_{\rho_1}h_{\rho_2}h_{\rho_3}}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{h_{\rho_2}h_{\rho_3}}{h_{\rho_1}}\right)\frac{\partial}{\partial \rho_1} \\
&+ \frac{1}{h^2_{\rho_2}}\frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2} + \frac{1}{h_{\rho_1}h_{\rho_2}h_{\rho_3}}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{h_{\rho_3}h_{\rho_1}}{h_{\rho_2}}\right)\frac{\partial}{\partial \rho_2} \\
&+ \frac{1}{h^2_{\rho 31}}\frac{\partial^2}{\partial \rho_3^2} + \frac{1}{h_{\rho_1}h_{\rho_2}h_{\rho_3}}\frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\frac{h_{\rho_1}h_{\rho_2}}{h_{\rho_3}}\right)\frac{\partial}{\partial \rho_3}
\end{aligned} \tag{9}$$

となる。ここで、

$$h_{\rho_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}{(\rho_1-\alpha)(\rho_1-\beta)(\rho_1-\gamma)}} \tag{10}$$

$$h_{\rho_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)}{(\rho_2-\alpha)(\rho_2-\beta)(\rho_2-\gamma)}} \tag{11}$$

$$h_{\rho_3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}{(\rho_3-\alpha)(\rho_3-\beta)(\rho_3-\gamma)}} \tag{12}$$

となるが,

$$\frac{h_{\rho_2}h_{\rho_3}}{h_{\rho_1}} = \sqrt{(\rho_1-\alpha)(\rho_1-\beta)(\rho_1-\gamma)} \times (\rho_2, \rho_3\text{の関数}) \tag{13}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_{\rho_1}h_{\rho_2}h_{\rho_3}}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{h_{\rho_2}h_{\rho_3}}{h_{\rho_1}}\right)\frac{\partial}{\partial \rho_1} &= \frac{1}{h_{\rho_1}h_{\rho_2}h_{\rho_3}}\frac{h_{\rho_2}h_{\rho_3}}{h_{\rho_1}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1-\alpha} + \frac{1}{\rho_1-\beta} + \frac{1}{\rho_1-\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial \rho_1} \\
&= \frac{1}{2h^2_{\rho_1}}\left(\frac{1}{\rho_1-\alpha} + \frac{1}{\rho_1-\beta} + \frac{1}{\rho_1-\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial \rho_1}
\end{aligned} \tag{14}$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
\nabla^2_{\mathbb{R}^3} &= \frac{1}{h^2_{\rho_1}}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1-\alpha}+\frac{1}{\rho_1-\beta}+\frac{1}{\rho_1-\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial\rho_1}\right] \\
&+ \frac{1}{h^2_{\rho_2}}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_2-\alpha}+\frac{1}{\rho_2-\beta}+\frac{1}{\rho_2-\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial\rho_2}\right] \\
&+ \frac{1}{h^2_{\rho_3}}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho_3^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_3-\alpha}+\frac{1}{\rho_3-\beta}+\frac{1}{\rho_3-\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial\rho_3}\right] \\
&= \frac{4(\rho_1-\alpha)(\rho_1-\beta)(\rho_1-\gamma)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1-\alpha}+\frac{1}{\rho_1-\beta}+\frac{1}{\rho_1-\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial\rho_1}\right] \\
&+ \frac{4(\rho_2-\alpha)(\rho_2-\beta)(\rho_2-\gamma)}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_2-\alpha}+\frac{1}{\rho_2-\beta}+\frac{1}{\rho_2-\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial\rho_2}\right] \\
&+ \frac{4(\rho_3-\alpha)(\rho_3-\beta)(\rho_3-\gamma)}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho_3^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_3-\alpha}+\frac{1}{\rho_3-\beta}+\frac{1}{\rho_3-\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial\rho_3}\right] \\
&= \frac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}L(\rho_1)+\frac{1}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)}L(\rho_2)+\frac{1}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}L(\rho_3) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

となる。但し，

$$
L(\rho) := 4(\rho-\alpha)(\rho-\beta)(\rho-\gamma)\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho-\alpha}+\frac{1}{\rho-\beta}+\frac{1}{\rho-\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\right] \qquad (16)
$$

を導入した．さらに，

$$
\frac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} = \left(\frac{1}{\rho_1-\rho_2}-\frac{1}{\rho_1-\rho_3}\right)\frac{1}{\rho_2-\rho_3} \qquad (17)
$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
\nabla^2_{\mathbb{R}^3} &= \frac{1}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)}\left(L(\rho_2)-L(\rho_1)\right)+\frac{1}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}\left(L(\rho_3)-L(\rho_1)\right) \\
&= \frac{1}{\rho_2-\rho_3}L(\rho_1,\rho_2)+\frac{1}{\rho_3-\rho_2}L(\rho_1,\rho_3) \\
&= \frac{1}{\rho_2-\rho_3}\left(L(\rho_1,\rho_2)-L(\rho_1,\rho_3)\right) \\
&= L(\rho_1,\rho_2,\rho_3) \qquad (18)
\end{aligned}
$$

となる．但し，

$$
L(\rho,\sigma) := \frac{1}{\rho-\sigma}\left(L(\rho)-L(\sigma)\right) \qquad (19)
$$

$$
L(\rho,\sigma,\tau) := \frac{1}{\sigma-\tau}\left(L(\rho,\sigma)-L(\rho,\tau)\right) \qquad (20)
$$

を導入した．明らかに

$$
L(\rho,\sigma) = L(\sigma,\rho), \quad L(\rho,\sigma,\tau) = L(\rho,\tau,\sigma) \qquad (21)
$$

が成り立つ．同様に

$$\frac{1}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)} = \left(\frac{1}{\rho_2-\rho_1} - \frac{1}{\rho_2-\rho_3}\right)\frac{1}{\rho_1-\rho_3} \tag{22}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\mathbb{R}^3} &= \frac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}\left(L(\rho_1)-L(\rho_2)\right) + \frac{1}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}\left(L(\rho_3)-L(\rho_2)\right) \\
&= \frac{1}{\rho_1-\rho_3}L(\rho_2,\rho_1) + \frac{1}{\rho_3-\rho_1}L(\rho_2,\rho_3) \\
&= \frac{1}{\rho_1-\rho_3}\left(L(\rho_2,\rho_1)-L(\rho_2,\rho_3)\right) \\
&= L(\rho_2,\rho_1,\rho_3)
\end{aligned} \tag{23}$$

が成立し，

$$\frac{1}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)} = \left(\frac{1}{\rho_3-\rho_1} - \frac{1}{\rho_3-\rho_2}\right)\frac{1}{\rho_1-\rho_2} \tag{24}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{\mathbb{R}^3} &= \frac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}\left(L(\rho_1)-L(\rho_3)\right) + \frac{1}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)}\left(L(\rho_2)-L(\rho_3)\right) \\
&= \frac{1}{\rho_1-\rho_2}L(\rho_3,\rho_1) + \frac{1}{\rho_2-\rho_1}L(\rho_3,\rho_2) \\
&= \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\left(L(\rho_3,\rho_1)-L(\rho_3,\rho_2)\right) \\
&= L(\rho_3,\rho_1,\rho_2)
\end{aligned} \tag{25}$$

が成立する．以上より，

$$\nabla^2_{\mathbb{R}^3} = L(\rho_1,\rho_2,\rho_3) = L(\rho_1,\rho_3,\rho_2) = L(\rho_2,\rho_1,\rho_3) = L(\rho_2,\rho_3,\rho_1) = L(\rho_3,\rho_1,\rho_2) = L(\rho_3,\rho_2,\rho_1) \tag{26}$$

のように Laplacian が表される．

2.2 Laplace 方程式の変数分離

Laplace 方程式

$$\nabla^2_{\mathbb{R}^3} f = 0 \tag{27}$$

を考える．

まず，Laplace 方程式 (27) の解 f が

$$f(\rho_1,\rho_2,\rho_3) = V(\rho_1)W(\rho_2)Z(\rho_3) \tag{28}$$

変数分離できることを仮定する．すると Laplace 方程式 (27) は

$$L(\rho_1,\rho_2,\rho_3)V(\rho_1)W(\rho_2)Z(\rho_3) = L(\rho_2,\rho_1,\rho_3)V(\rho_1)W(\rho_2)Z(\rho_3) = L(\rho_3,\rho_1,\rho_2)V(\rho_1)W(\rho_2)Z(\rho_3) = 0 \tag{29}$$

となり、

$$L(\rho_1,\rho_2,\rho_3)V(\rho_1)W(\rho_2)Z(\rho_3)=0 \tag{30}$$

より，

$$\begin{align}
0&=\frac{1}{V(\rho_1)W(\rho_2)Z(\rho_3)}\left(L(\rho_1,\rho_2)-L(\rho_1,\rho_3)\right)V(\rho_1)W(\rho_2)Z(\rho_3) \tag{31}\\
&=\frac{1}{V(\rho_1)W(\rho_2)}L(\rho_1,\rho_2)\left[V(\rho_1)W(\rho_2)\right]-\frac{1}{V(\rho_1)Z(\rho_3)}L(\rho_1,\rho_3)\left[V(\rho_1)Z(\rho_3)\right] \tag{32}
\end{align}$$

が導かれる．したがって，

$$\frac{1}{V(\rho_1)W(\rho_2)}L(\rho_1,\rho_2)\left[V(\rho_1)W(\rho_2)\right]=\frac{1}{V(\rho_1)Z(\rho_3)}L(\rho_1,\rho_3)\left[V(\rho_1)Z(\rho_3)\right] \tag{33}$$

であるが，上式は左辺が ρ_1,ρ_2 の関数で右辺が ρ_1,ρ_3 の関数であることから，

$$\frac{1}{V(\rho_1)W(\rho_2)}L(\rho_1,\rho_2)\left[V(\rho_1)W(\rho_2)\right]=\frac{1}{V(\rho_1)Z(\rho_3)}L(\rho_1,\rho_3)\left[V(\rho_1)Z(\rho_3)\right]=(\rho_1\text{の関数}) \tag{34}$$

となる．同様に

$$L(\rho_2,\rho_1,\rho_3)V(\rho_1)W(\rho_2)Z(\rho_3)=0 \tag{35}$$

から，

$$\frac{1}{W(\rho_2)V(\rho_1)}L(\rho_2,\rho_1)\left[W(\rho_2)V(\rho_1)\right]=\frac{1}{Z(\rho_3)V(\rho_2)}L(\rho_2,\rho_3)\left[Z(\rho_3)W(\rho_2)\right]=(\rho_2\text{の関数}) \tag{36}$$

となる．したがって，

$$\begin{align}
\frac{1}{V(\rho_1)W(\rho_2)}L(\rho_1,\rho_2)\left[V(\rho_1)W(\rho_2)\right]&=\frac{1}{V(\rho_1)Z(\rho_3)}L(\rho_1,\rho_3)\left[V(\rho_1)Z(\rho_3)\right]\\
&=\frac{1}{Z(\rho_3)V(\rho_2)}L(\rho_2,\rho_3)\left[Z(\rho_3)W(\rho_2)\right]\\
&=\lambda \tag{37}
\end{align}$$

なる定数 λ が存在する．*1 以上より，

$$\begin{align}
\left[\frac{1}{V(\rho_1)}L(\rho_1)V(\rho_1)-\frac{1}{W(\rho_2)}L(\rho_2)W(\rho_2)\right]&=(\rho_1-\rho_2)\lambda \tag{38}\\
\left[\frac{1}{V(\rho_1)}L(\rho_1)V(\rho_1)-\frac{1}{Z(\rho_3)}L(\rho_3)Z(\rho_3)\right]&=(\rho_1-\rho_3)\lambda \tag{39}
\end{align}$$

となり，

$$\begin{align}
\frac{1}{V(\rho_1)}L(\rho_1)V(\rho_1)-\lambda\rho_1&=\frac{1}{W(\rho_2)}L(\rho_2)W(\rho_2)-\lambda\rho_2\\
&=\frac{1}{Z(\rho_3)}L(\rho_3)Z(\rho_3)-\lambda\rho_3 \tag{40}
\end{align}$$

---

*1 式 (34) の左辺と式 (36) の左辺が等しくなることから，$\frac{1}{V(\rho_1)W(\rho_2)}L(\rho_1,\rho_2)\left[V(\rho_1)W(\rho_2)\right]$ が ρ_1 の関数にも ρ_2 の関数にもなることから，定数となる必要があることを用いた．

が導かれる．なる定数 μ が存在する．式 (40) の左辺は ρ_1 の関数，中辺は ρ_2 の関数，右辺は ρ_3 の関数，であることからこれらは定数でなくてはならない．この定数を μ とすれば，

$$\begin{aligned}L(\rho_1)V(\rho_1)-(\lambda\rho_1+\mu)V(\rho_1)&=L(\rho_2)W(\rho_2)-(\lambda\rho_2+\mu)W(\rho_2) &(41)\\&=L(\rho_3)Z(\rho_3)-(\lambda\rho_3+\mu)Z(\rho_3) &(42)\\&=0 &(43)\end{aligned}$$

となるので，

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_1^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho_1-\alpha}+\frac{1}{\rho_1-\beta}+\frac{1}{\rho_1-\gamma}\right\}\frac{d}{d\rho_1}-\frac{\lambda\rho_1+\mu}{4(\rho_1-\alpha)(\rho_1-\beta)(\rho_1-\gamma)}\right]V(\rho_1)=0 \tag{44}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_2^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho_2-\alpha}+\frac{1}{\rho_2-\beta}+\frac{1}{\rho_2-\gamma}\right\}\frac{d}{d\rho_2}-\frac{\lambda\rho_2+\mu}{4(\rho_2-\alpha)(\rho_2-\beta)(\rho_2-\gamma)}\right]W(\rho_2)=0 \tag{45}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho_3^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho_3-\alpha}+\frac{1}{\rho_3-\beta}+\frac{1}{\rho_3-\gamma}\right\}\frac{d}{d\rho_3}-\frac{\lambda\rho_3+\mu}{4(\rho_3-\alpha)(\rho_3-\beta)(\rho_3-\gamma)}\right]Z(\rho_3)=0 \tag{46}$$

となる．注目すべき点は ρ_1,ρ_2,ρ_3 に関する微分方程式が同一となる点である。ただし、ρ_1,ρ_2,ρ_3 の動くの範囲は異なっている。これらの微分方程式は Lamé の微分方程式と呼ばれる。

参考文献

[1] Gabriel Lamé, “Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.”, Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 147-183.

[2] Dassios, George. Ellipsoidal harmonics: theory and applications. Vol. 146. Cambridge University Press, 2012.